1 以下の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。なお、分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。

問１　３以上の整数 m と実数 a（ただし、$a \fallingdotseq 2$）に対し、x の m 次式 $(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを

$$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3}P_n(m)x^{3-n}$$

と表すとき、m の２次式 $P_n(m)$（$n=1$、２、３）を平方完成した形で求めると

$$P_1(m)=\boxed{\text{ア}}\left(m-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$P_2(m)=-\boxed{\text{カ}}\left(m-\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}}\right)^2+\frac{a^2-\boxed{\text{ケ}}a+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

$$P_3(m)=\boxed{\text{シ}}\left(m-\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}\right)^2+\frac{a^2-\boxed{\text{ソ}}a-\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

となる。

問２　問１において、数列

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}、\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}}、\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}$$

は初項 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$、公比 $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}-a}{\boxed{\text{テ}}}$ の等差数列となる。また座標平面上の３点

$$\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}、-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)、\left(\frac{\boxed{\text{キ}}-a}{\boxed{\text{ク}}}、\frac{a^2-\boxed{\text{ケ}}a+\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)、\left(\frac{\boxed{\text{ス}}-a}{\boxed{\text{セ}}}、\frac{a^2-\boxed{\text{ソ}}a-\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

が同一直線上にあるための a に対する必要十分条件は $a=\boxed{\text{ト}}$ である。

（解説）

問１　$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3}P_n(m)x^{3-n}=(2-a)^{m-2}\{P_1(m)x^2+P_2(m)x+P_3(m)\}$ より

x の m 次式 $(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの商を $Q(x)$、

余りを $(2-a)^{m-2}\cdot(px^2+qx+r)$ とすると

$$(2x-a)^m=(x-1)^3Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot(px^2+qx+r) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。（このとき、$p=P_1(m)$、$q=P_2(m)$、$r=P_3(m)$ となる）

① に $x=1$ を代入して

$$(2-a)^2=p+q+r \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

① を x で微分して

$$2m(2x-a)^{m-1}=3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)+(2-a)^{m-2}\cdot(2px+q) \quad \cdots\cdots ③$$

③ に $x=1$ を代入して

$$2m(2-a)=2p+q \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

③ を x で微分して

$$4m(m-1)(2-a)^{m-2}=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)+3(x-1)^2Q'(x)$$
$$+(x-1)^3Q''(x)+(2-a)^{m-2}\cdot 2p \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤ に $x=1$ を代入して

$$4m(m-1)=2p$$
$$\therefore\quad p=2m(m-1) \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

よって、$P_1(m)=2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

④ に代入して

$$2m(2-a)=4m(m-1)+q$$
$$\therefore\quad q=2m\{(2-a)-2(m-1)\}$$
$$=\{-4m^2+2(4-a)m\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

よって、$P_2(m)=-4\left(m-\dfrac{4-a}{4}\right)^2+\dfrac{a^2-8a+16}{4}$

⑥、⑦ を ② に代入して

$$(2-a)^2=2m(m-1)+\{-4m^2+2(4-a)m\}+r$$
$$\therefore\quad r=[(2-a)^2-2m(m-1)-\{-4m^2+2(4-a)m\}]$$
$$=\{2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2\}$$

よって、$P_3(m)=2\left(m-\dfrac{3-a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2-2a-1}{2}$

別解　② の続きから

$$(2-a)^2=p+q+r \quad \cdots\cdots\cdots ②$$
$$\therefore\quad r=(2-a)^2-p-q$$

① に代入して

$$(2x-a)^m=(x-1)^3Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{px^2+qx+(2-a)^2-p-q\}$$

$$=(x-1)^3Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x^2-1)+q(x-1)\}+(2-a)^m$$

$$\therefore\quad (2x-a)^m-(2-a)^m=(x-1)^3Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x-1)(x+1)+q(x-1)\}$$

$$\therefore\quad (2x-a)^m-(2-a)^m=(x-1)[(x-1)^2Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x+1)+q\}]$$

ここで、$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$=(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\cdot b^k \quad \cdots\cdots\cdots ⑧ \quad \text{より}$$

$$(\text{左辺})=\{(2x-a)-(2-a)\}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(2x-a)^{n-1-k}\cdot(2-a)^k$$

$$=2(x-1)\sum_{k=0}^{m-1}(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k$$

となるので、両辺 $(x-1)$ で割って

$$2\sum_{k=0}^{m-1}(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k=(x-1)^2Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x+1)+q\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

$x=1$ を代入して

$$2\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^{m-1}=(2-a)^{m-2}\cdot(2p+q)$$

$$\therefore\quad 2m(2-a)^{m-1}=(2-a)^{m-2}\cdot(2p+q)$$
$$\therefore\quad 2p+q=2m(2-a)$$
$$\therefore\quad q=2m(2-a)-2p \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

⑨ に代入して

$$2\sum_{k=0}^{m-1}(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k=(x-1)^2Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x+1)+2m(2-a)-2p\}$$
$$=(x-1)^2Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x-1)\}+2m(2-a)^{m-1}$$

$$\therefore\quad 2\left\{\sum_{k=0}^{m-1}(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k-m(2-a)^{m-1}\right\}=(x-1)^2Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot\{p(x-1)\}$$

ここで、左辺の｛　｝の中身について

$$\sum_{k=0}^{m-1}(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k-m(2-a)^{m-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\{(2x-a)^{m-1-k}\cdot(2-a)^k-(2-a)^{m-1}\}$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot\{(2x-a)^{m-1-k}-(2-a)^{m-1-k}\}$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot 2(x-1)\cdot\sum_{\ell=0}^{m-2-k}(2x-a)^{m-2-k-\ell}\cdot(2-a)^\ell \quad (\because ⑧)$$

となるので、両辺 $(x-1)$ で割って

$$4\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot\sum_{\ell=0}^{m-2-k}(2x-a)^{m-2-k-\ell}\cdot(2-a)^\ell=(x-1)Q(x)+(2-a)^{m-2}\cdot p$$

$x=1$ を代入して

$$(2-a)^{m-2}\cdot p=4\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot\sum_{\ell=0}^{m-2-k}(2-a)^{m-2-k-\ell}\cdot(2-a)^\ell$$
$$=4\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot\sum_{\ell=0}^{m-2-k}(2-a)^{m-2-k}$$
$$=4\sum_{k=0}^{m-1}(2-a)^k\cdot(m-k-1)\cdot(2-a)^{m-2-k}$$
$$=4\sum_{k=0}^{m-1}(m-k-1)\cdot(2-a)^{m-2}$$

よって、$p=4\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(m-k-1)$

$$=4\cdot\frac{m}{2}\{(m-1)+0\}$$
$$=2m(m-1)$$

②、④ と連立して（以下、最初の解答と同じより省略）

別解　$x-1=t$ とおくと

$$(2x-a)^m=\{2(t+1)-a\}^m$$
$$=\{2t+(2-a)\}^m$$
$$=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k(2t)^k\cdot(2-a)^{m-k}$$
$$={}_mC_0(2-a)^m+{}_mC_1\cdot 2t\cdot(2-a)^{m-1}+{}_mC_2\cdot(2t)^2\cdot(2-a)^{m-2}$$
$$+{}_mC_3\cdot(2t)^3\cdot(2-a)^{m-3}+\cdots\cdots+{}_mC_m\cdot(2t)^m$$
$$=(2-a)^m+2m(2-a)^{m-1}\cdot t+2m(m-1)(2-a)^{m-2}\cdot t^2$$
$$+(t\text{ の３次以上の項})$$

となる。

よって、$t^3=(x-1)^3$ で割った余りは

$$(2-a)^m+2m(2-a)^{m-1}\cdot t+2m(m-1)(2-a)^{m-2}\cdot t^2$$
$$=(2-a)^m+2m(2-a)^{m-1}\cdot(x-1)+2m(m-1)(2-a)^{m-2}\cdot(x-1)^2$$
$$=(2-a)^{m-2}\{(2-a)^2+2m(2-a)(x-1)+2m(m-1)(x-1)^2\}$$
$$=(2-a)^{m-2}[2m(m-1)x^2+\{-4m^2+2(4-a)m\}x+2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2]$$

となる。よって

$$P_1(m)=2m(m-1)$$
$$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$P_2(m)=-4m^2+2(4-a)m$$
$$=-4\left(m-\frac{4-a}{4}\right)^2+\frac{a^2-8a+16}{4}$$

$$P_3(m)=2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2$$

$$=2\left(m-\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-1}{2}$$

問２　問１より、数列は

$$\frac{1}{2}、\frac{4-a}{4}、\frac{3-a}{2}$$

は、初項 $\frac{1}{2}$、公差 $\frac{4-a}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2-a}{4}$ の等差数列になる。

よって、３点 $\left(\frac{1}{2}、-\frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{4-a}{4}、\frac{a^2-8a+16}{4}\right)$、$\left(\frac{3-a}{2}、\frac{a^2-2a-1}{2}\right)$ が同一直線上となるための必要十分条件は、y 座標も等差数列になることより

$$-\frac{1}{2}+\frac{a^2-2a-1}{2}=2\cdot\frac{a^2-8a+16}{4}$$

$\therefore\ a^2-2a-2=a^2-8a+16$

$\therefore\ 6a=18$

$\therefore\ a=3$

2 n を３以上の整数とする。中が見えない袋の中に白球が n 個、黒球が n 個、赤球が３個入っており、袋の中から３個の球を無作為に同時に取り出す試行を行う。取り出した３個の球の色の種類が２である確率を p_n とする。また、取り出した３個の球の色の種類が２であり、かつその３個の球に赤球が含まれない確率を q_n とする。このとき、以下の各問に答えよ。また、以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に適する１以上の整数を解答欄に記入せよ。分数形で解答する場合、既約分数で答えること。

問１　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\cdot\frac{n^3+\boxed{ウ}\,n+\boxed{エ}\,n}{\left(n+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)\left(n+\boxed{キ}\right)\left(n+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)}\quad\left(ただし、\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}>\boxed{キ}>\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)$$

となる。

問２　数列 $\{q_n\}$ の極限を $\alpha=\lim_{n\to\infty}q_n$ とすると、$\alpha=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ となる。

問３　問２の α に対し、極限 $\beta=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n$ の値を求めよ。必要ならば自然対数の底の定義 $e=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$（ただし、$t$ は実数）を用いてよい.

（解説）

問１　異なる $2n+3$ 個の球から３個を取り出したとき、取り出された球の色がちょうど２種類となるのは

（ⅰ）　白球を２個と黒球を１個、または 白球を１個と黒球を２個

（ⅱ）　黒球を２個と赤球を１個、または 黒球を１個と赤球を２個

（ⅲ）　赤球を２個と白球を１個、または 赤球を１個と白球を２個

を取り出すときである。

（ⅰ）のとき、${}_nC_2\cdot{}_nC_1+{}_nC_1\cdot{}_nC_2=2\left\{\frac{n(n-1)}{2}\cdot n\right\}=n^2(n-1)$ 通り

（ⅱ）、（ⅲ）のとき、${}_3C_1\cdot{}_nC_2+{}_3C_2\cdot{}_nC_1=3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3n=\frac{3}{2}n(n+1)$ 通り

よって、求める確率 p_n は

$$p_n=\frac{n^2(n-1)+2\cdot\frac{3}{2}n(n+1)}{{}_{2n+3}C_3}$$

$$=\frac{n^3+2n^2+3n}{\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{3\cdot2}}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{n^3+2n^2+3n}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

問２　問１の（ⅰ）のときより

$$q_n=\frac{n^2(n-1)}{{}_{2n+3}C_3}$$

$$=\frac{n^2(n-1)}{\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{3\cdot2}}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$

よって、$\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{3}{4}$ より、$\alpha=\frac{3}{4}$

問３　$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^3+2n^2+3n}\right\}^n$$

$\frac{1}{n}=t$ とおくと、$n\to\infty$ より $t\to0$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{t}+1\right)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t}}\right\}^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left(1+\frac{3}{2}t\right)^{\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left(1+\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{t}}}{(1+2t+3t^2)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left\{\left(1+\frac{3t}{2}\right)^{\frac{2}{3t}}\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left[\left\{1+(2t+3t^2)\right\}^{\frac{1}{2t+3t^2}}\right]^{2+3t}}$$

$$=\frac{e^{\frac{3}{2}}\cdot e\cdot e^{\frac{1}{2}}}{e^2}$$

$$=e$$

3 実数の定数 ℓ は $\ell \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を満たすとする。四面体 ABCD において、AB＝AC＝BD＝CD＝ℓ、辺 AB を $1:5$ に内分する点を L、辺 BC の中点を M、辺 CD を $5:3$ に内分する点を N とし、これら 3 点で定まる平面 LMN と直線 AD との交点を P とする。また、点 P から平面 BCD に垂線 PH を下ろしたとき、$\mathrm{PH}=\dfrac{\ell}{2}$ であるとする。$x=\mathrm{AM}$ とおき、四面体 ABCD の体積を V として、以下の各問いに答えよ。

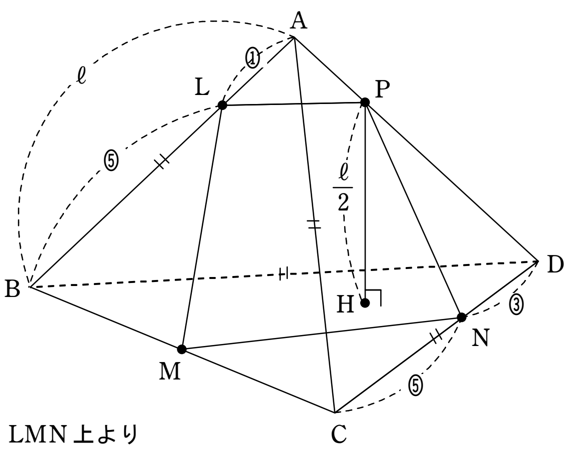
問 1　$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

問 2　x がとりうる値の範囲を求めよ。答えのみでよい。

問 3　V を ℓ と x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　ℓ を固定して、$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\geqq\dfrac{2}{3}$ を満たすように x を動かすとき、V の最大値 V_{max} を求めよ。

解説



問 1　P は平面 LMN 上より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{LP}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AL}}+s\overrightarrow{\mathrm{LM}}+t\overrightarrow{\mathrm{LN}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AL}}+s(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}})$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{AL}}+s\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$
$$=(1-s-t)\cdot\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}+t\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$
$$=\frac{1+2s-t}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4s+3t}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{5}{8}t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

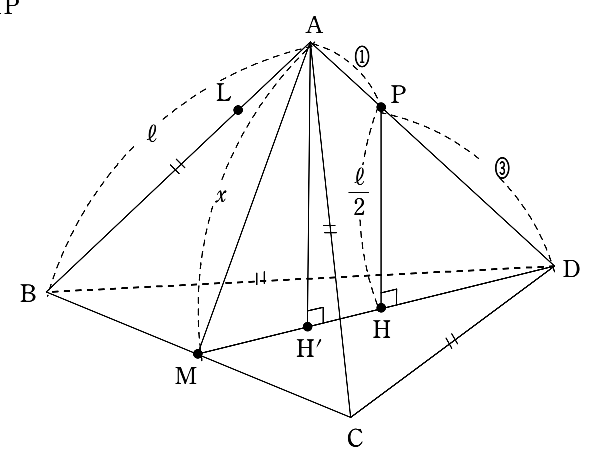
P は直線 AD 上の点でもあるので

$$\frac{1+2s-t}{6}=0 \text{ かつ、} \frac{4s+3t}{8}=0$$
$$\therefore\quad s=-\frac{3}{10}\text{、}t=\frac{2}{5}$$

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より、AP : PD＝1 : 3

よって、$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}=3$

問 2



△ABC と△DBC は二等辺三角形かつ合同より、平面 AMD に対して、
四面体ABCD は対称であるので、A から△BCD に下ろした垂線の足を H′ とすると、
H、H′ は線分 DM 上にある。
よって、△DPH∽△DAH′ で、相似比は 3 : 4 より

$$\mathrm{PH}:\mathrm{AH'}=3:4$$
$$\therefore\quad \mathrm{AH'}=\frac{4}{3}\mathrm{PH}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{2}{3}\ell$$

△ABC より、AM＜AB

$$\therefore\quad x<\ell$$

△AMD より、AM≧AH′

$$\therefore\quad x\geqq\frac{2}{3}\ell$$

よって、求める x のとりうる値の範囲は

$$\frac{2}{3}\ell\leqq x<\ell$$　（このとき、四面体 ABCD は存在する。）

問 3　DM＝AM＝x より

△BDM で三平方の定理から

$$\ell^2=\mathrm{BM}^2+x^2$$
$$\therefore\quad \mathrm{BM}=\sqrt{\ell^2-x^2}$$

よって、$\mathrm{BC}=2\mathrm{BM}=2\sqrt{\ell^2-x^2}$　より

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH'}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DM}\cdot\mathrm{BC}\right)\times\mathrm{AH'}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\sqrt{\ell^2-x^2}\right)\times\frac{2}{3}\ell$$
$$=\frac{2}{9}\ell x\sqrt{\ell^2-x^2}$$

問 4　ℓ は定数で、x が変数より

$$V=\frac{2}{9}\ell x\sqrt{\ell^2-x^2}$$
$$=\frac{2}{9}\ell\sqrt{x^2\ell^2-x^4}$$
$$=\frac{2}{9}\ell\sqrt{-\left(x^2-\frac{\ell^2}{2}\right)^2+\frac{\ell^2}{4}}$$

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\geqq 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|\cos\angle\mathrm{AMD}$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{MH'}}|$$
$$=x\cdot\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AH'}^2}$$
$$=x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}\ell^2}\quad\cdots\cdots①$$

よって、$x\sqrt{x^2-\dfrac{4}{9}\ell^2}\geqq 0$

これは、問 2 より、$\dfrac{2}{3}\ell\leqq x<\ell$ であるから常に成立。

また、△AMD で余弦定理より

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{MA}^2+\mathrm{MD}^2-2\cdot\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MD}\cdot\cos\angle\mathrm{AMD}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AD}^2=x^2+x^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AD}^2=2x^2-2x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}\ell^2}\quad(\because①)\quad\cdots\cdots②$$

△ABD で余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\cos\angle\mathrm{BAD}$$
$$\therefore\quad \ell^2=\ell^2+\mathrm{AD}^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}^2$$
$$=x^2-x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}\ell^2}\quad(\because②)$$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\geqq\dfrac{2}{3}$ より

$$x^2-x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}\ell^2}\geqq\frac{2}{3}$$
$$\therefore\quad x^2-\frac{2}{3}\geqq x\sqrt{x^2-\frac{4}{9}\ell^2}\quad\cdots\cdots③$$

$\dfrac{2}{3}\ell\leqq x<\ell$ かつ、$\ell\geqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ より、$x\geqq\dfrac{2}{3}\ell\geqq\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって、$x^2\geqq\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$ より

③ の両辺は正となるので、2 乗して

$$\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2\geqq x^2\left(x^2-\frac{4}{9}\ell^2\right)$$
$$\therefore\quad -\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{9}\geqq-\frac{4}{9}\ell^2x^2$$
$$\therefore\quad (3-\ell^2)x^2\leqq 1\quad\cdots\cdots④$$

（i）$3-\ell^2\leqq 0$ のとき

つまり、$\sqrt{3}\leqq\ell$ のとき

④ は常に成立する。

よって、$\dfrac{2}{3}\ell\leqq x<\ell$ から、$\dfrac{4}{9}\ell^2\leqq x^2<\ell^2$

したがって、$\dfrac{4}{9}\ell^2<\dfrac{\ell^2}{2}<\ell^2$ より

$x^2=\dfrac{\ell^2}{2}$ で、V は最大値 $\dfrac{2}{9}\ell\sqrt{\dfrac{\ell^2}{4}}=\dfrac{\ell^2}{9}$ となる。

（ii）$3-\ell^2>0$ のとき

つまり、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq\ell<\sqrt{3}$ ………⑤　のとき

④ より 、$x^2\leqq\dfrac{1}{3-\ell^2}$

ここで、
$$\frac{\ell^2}{2}-\frac{1}{3-\ell^2}=\frac{\ell^2(3-\ell^2)-2}{2(3-\ell^2)}$$
$$=\frac{-\ell^4+3\ell^2-2}{2(3-\ell^2)}$$
$$=\frac{-(\ell^2-2)(\ell^2-1)}{2(3-\ell^2)}\quad\cdots\cdots⑥$$　より

(a)　⑥＞0 のとき

つまり、⑤より、$\ell^2-2<0$ となるので、$-\sqrt{2}<\ell<\sqrt{2}$

よって、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq\ell<\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{2}{3}\ell\leqq x<\dfrac{1}{3-\ell^2}<\dfrac{\ell^2}{2}$　より

$x^2=\dfrac{1}{3-\ell^2}$ で、V は最大値 $\dfrac{2}{9}\ell\sqrt{\dfrac{1}{3-\ell^2}\left(\ell^2-\dfrac{1}{3-\ell^2}\right)}=\dfrac{2\ell\sqrt{-\ell^4+3\ell^2-1}}{9(3-\ell^2)}$

となる。

(b)　⑥$\leqq0$ のとき

つまり、⑤より、$\ell^2-2\geqq0$ となるので、$\ell\leqq-\sqrt{2}$、$\sqrt{2}\leqq\ell$

よって、$\sqrt{2}\leqq\ell<\sqrt{3}$ のとき

$\dfrac{2}{3}\ell\leqq x<\dfrac{\ell^2}{2}\leqq\dfrac{1}{3-\ell^2}$ より

$x^2=\dfrac{\ell^2}{2}$ で、V は最大値 $\dfrac{2}{9}\ell\sqrt{\dfrac{\ell^2}{4}}=\dfrac{\ell^2}{9}$ となる。

以上より

$\sqrt{2}\leqq\ell$ のとき、最大値 $\dfrac{\ell^2}{9}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq\ell<\sqrt{2}$ のとき、最大値 $\dfrac{2\ell\sqrt{-\ell^4+3\ell^2-1}}{9(3-\ell^2)}$

4 関数 $f(x)\ (x>0)$ は連続で、第 1 次導関数 $f'(x)$ が存在して連続で、第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し、かつ $f'(x)>0$、$f''(x)>0$ を満たすと仮定する。座標平面において、曲線 $C：y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t、f(t))$ における C の法線と、点 $\mathrm{B}(t+h、f(t+h))\ (h\neq 0)$ における C の法線の交点を $\mathrm{P}(h)$ とおく。h を 0 に限りなく近づけるとき、点 $\mathrm{P}(h)$ が限りなく近づく点を P とする。また、2 点 A、P 間の距離を $R(t)$ とおく。

問 1　点 $\mathrm{A}(t、f(t))$ における C の法線の方程式を、t、$f(t)$、$f'(t)$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　点 P の座標を以下の形で求めよ。

$$\left(t-\boxed{\quad ア \quad}、f(t)+\boxed{\quad イ \quad}\right)$$

問 3　$R(t)$ を求めよ。答えのみでよい。

問 4　以上の結果を用いて、関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{e^{2t}-1}\,dt\ (x>0)$ に対して、次の定積分 I の値を求めよ。

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{R(t)}dt$$

解説

問 1　点 $\mathrm{A}(t、f(t))$ における C の法線の方程式は、

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)\qquad (\because f'(t)>0)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{f'(t)}x+\frac{t}{f'(t)}+f(t)\qquad\cdots\cdots ①$$

問 2　点 $\mathrm{B}(t+h、f(t+h))$ における C の法線の方程式は、

$$y=-\frac{1}{f'(t+h)}x+\frac{t+h}{f'(t+h)}+f(t+h)\qquad\cdots\cdots ②$$

①、② の交点が $\mathrm{P}(h)$ より

$$-\frac{1}{f'(t)}x+\frac{t}{f'(t)}+f(t)=-\frac{1}{f'(t+h)}x+\frac{t+h}{f'(t+h)}+f(t+h)$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1}{f'(t+h)}-\frac{1}{f'(t)}\right)x=f(t+h)-f(t)+\frac{t+h}{f'(t+h)}-\frac{t}{f'(t)}$$

$$\therefore\quad\frac{f'(t)-f'(t+h)}{f'(t)\cdot f'(t+h)}x=f(t+h)-f(t)+\frac{t+h}{f'(t+h)}-\frac{t}{f'(t)}$$

$f''(t)>0$ より、$f'(t)$ は単調増加となるので、$f'(t)-f'(t+h)\neq 0$

よって、
$$x=\frac{f'(t)\cdot f'(t+h)}{f'(t)-f'(t+h)}\left\{f(t+h)-f(t)+\frac{t+h}{f'(t+h)}-\frac{t}{f'(t)}\right\}$$

$$=\underbrace{\frac{f'(t)\cdot f'(t+h)}{f'(t)-f'(t+h)}\cdot\{f(t+h)-f(t)\}}_{③\text{とおく}}+\underbrace{\frac{f'(t)\cdot f'(t+h)}{f'(t)-f'(t+h)}\cdot\left\{\frac{t+h}{f'(t+h)}-\frac{t}{f'(t)}\right\}}_{④\text{とおく}}$$

ここで

$$③=\frac{f'(t)\cdot f'(t+h)}{-\dfrac{f'(t+h)-f'(t)}{h}}\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$④=\frac{1}{f'(t)-f'(t+h)}\cdot\{(t+h)f'(t)-tf'(t+h)\}$$

$$=\frac{1}{f'(t)-f'(t+h)}\cdot[t\{f'(t)-f'(t+h)\}+hf'(t)]$$

$$=t-\frac{h}{f'(t+h)-f'(t)}\cdot f'(t)$$

よって、
$$\lim_{h\to 0}x=\frac{\{f'(t)\}^2}{-f''(t)}\cdot f'(t)+t-\frac{1}{f''(t)}\cdot f'(t)$$

$$=t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}$$

① に代入して

$$y=-\frac{1}{f'(t)}\left[t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}\right]+\frac{t}{f'(t)}+f(t)$$

$$=\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}+f(t)$$

よって、P の座標は

$$\left(t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}、f(t)+\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}\right)$$

問 3　点 A と点 P との距離が $R(t)$ より

$$\{R(t)\}^2=\left[t-\left\{t-\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}\right\}\right]^2+\left[f(t)-\left\{f(t)+\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}\right\}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\{f'(t)\}^3+f'(t)}{f''(t)}\right]^2+\left[\frac{\{f'(t)\}^2+1}{f''(t)}\right]^2$$

$$=\frac{\{f'(t)\}^6+2\{f'(t)\}^4+\{f'(t)\}^2+\{f'(t)\}^4+2\{f'(t)\}^2+1}{\{f''(t)\}^2}$$

$$=\frac{\{f'(t)\}^6+3\{f'(t)\}^4+3\{f'(t)\}^2+1}{\{f''(t)\}^2}$$

$$=\frac{[\{f'(t)\}^2+1]^3}{\{f''(t)\}^2}$$

$f''(t)>0$ より

$$R(t)=\frac{[\{f'(t)\}^2+1]^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}$$

問 4　$f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{e^{2t}-1}\,dt$ より

$$f'(x)=\sqrt{e^{2x}-1}、f''(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$x>0$ で、$f'(x)>0$、$f''(x)>0$ より

$$R(t)=\frac{[\{f'(t)\}^2+1]^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}$$

$$=\frac{\{(\sqrt{e^{2t}-1})^2+1\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}}$$

$$=e^t\sqrt{e^{2t}-1}$$

よって、$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}dt$

ここで、$u=\sqrt{e^{2t}-1}$ とおくと、$du=\dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}dt$

また、$u^2=e^{2t}-1$ より、$e^{2t}=u^2+1$

よって、$du=\dfrac{u^2+1}{u}dt$ より、$dt=\dfrac{u}{u^2+1}du$

$t：\dfrac{1}{2}\to\log 2$ のとき、$u：\sqrt{e-1}\to\sqrt{3}$ より

$$I=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}\cdot u}\cdot\frac{u}{u^2+1}du$$

$$=\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{3}}\frac{du}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$u=\tan\theta$ とおくと、$du=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$u：\sqrt{e-1}\to\sqrt{3}$ のとき、$\theta：\alpha\to\dfrac{\pi}{3}$ より

（ただし、α は、$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$、$\tan\alpha=\sqrt{e-1}$ を満たす。）

$$I=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\Big[\sin\theta\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha$$

$\tan\alpha=\sqrt{e-1}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より、$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{e-1}{e}}$

よって、$I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\dfrac{e-1}{e}}$

別解　$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}dt$ の計算方法について

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}\cdot\frac{e^{-2t}}{e^{-2t}}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{(1-e^{-2t})'}{2\sqrt{1-e^{-2t}}}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\left(\sqrt{1-e^{-2t}}\right)'dt$$

$$=\Big[\sqrt{1-e^{-2t}}\Big]_{\frac{1}{2}}^{\log 2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{e-1}{e}}$$

別解　$u=\dfrac{\sqrt{e^{2t}-1}}{e^t}$ とおくと、$du=\dfrac{\dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}\cdot e^t-\sqrt{e^{2t}-1}\cdot e^t}{e^{2t}}dt=\dfrac{dt}{e^t\sqrt{e^{2t}-1}}$

$t：\dfrac{1}{2}\to\log 2$ のとき、$u：\sqrt{\dfrac{e-1}{e}}\to\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$I=\int_{\sqrt{\frac{e-1}{e}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}du$$

$$=\Big[u\Big]_{\sqrt{\frac{e-1}{e}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{e-1}{e}}$$